

带多局部形状参数的三次扩展均匀 B 样条曲线

胡钢^{1,2}, 刘哲¹, 秦新强², 戴芳²

(1. 西北工业大学理学院, 710072, 西安; 2. 西安理工大学理学院, 710054, 西安)

摘要: 为了构造带局部形状控制参数的 B 样条曲线, 给出了一组含有 λ_i 、 μ_i 2 个形状参数的四次多项式调配函数, 它是三次均匀 B 样条基函数的新扩展. 同时, 分析了这组调配函数的性质, 并基于调配函数定义了一种新的带有 λ_i 、 μ_i 2 个局部形状控制参数的分段多项式样条曲线, 其以三次均匀 B 样条曲线为特殊情形. 最后, 讨论了新曲线在曲线造型中的应用, 并给出了相应扩展曲面的定义. 造型实例表明, 新曲线不仅具有灵活的局部形状可调性和更强的描述能力, 而且可以在不改变曲线 G^1 连续性和不影响曲线其他各段形状的同时, 通过改变局部形状参数对曲线每段的形状进行多种方式的局部调整, 为曲线和曲面的设计提供了一种有效的新方法.

关键词: 三次均匀 B 样条; 调配函数; 局部形状参数; 曲线设计

中图分类号: TP391.4 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2008)10-1245-05

New Extension of Uniform Cubic B-Spline Curve with Multiple Local Shape Parameters

HU Gang^{1,2}, LIU Zhe¹, QIN Xinqiang², DAI Fang²

(1. School of Science, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China; 2. School of Science, Xi'an University of Technology, Xi'an 710054, China)

Abstract: The construction of B-spline curves with shape control parameters is one of the most popular areas in computer aided geometric design. A class of new polynomial basis functions with two local shape parameters λ_i , μ_i is presented to construct B-spline curves with multiple local shape control parameters, which is an extension of the classical cubic uniform B-spline basis functions. The properties of the proposed basis functions are analyzed and the corresponding piecewise polynomial curve with two local shape control parameters λ_i , μ_i is constructed. The extension not only inherits the outstanding properties of the cubic uniform B-spline curves, but also has a good performance on adjusting their local shapes by changing the two local shape control parameters. In particular, the G^1 continuous and the shapes of other segments on the curve can remain unchanged during manipulating the shape of one segment on the curve. Eventually, some applications in curve design are discussed and an extended application in surface design is also presented. The modeling examples illustrate that the new extension provides a valuable way for the design of curves and surfaces.

Keywords: cubic uniform B-spline; blending functions; local shape parameter; curve design

曲线曲面的表示是计算机辅助几何设计 (CAGD) 中一个重要的研究课题, 其中分段三次均匀 B 样条曲线结构简单、使用灵活及自然光滑连

接, 所以是 CAGD 中最常用的曲线之一. 然而, 对给定的控制点, 它的位置是确定的, 如果要调整曲线的形状, 则需要调整其相应的控制多边形. 有理

Bézier 曲线和 NURBS 曲线通过引入权因子,则无需改变控制顶点,仅由权因子便可调整曲线的形状或改变曲线的位置,但它们也存在局限性,例如计算比较复杂,求导求积不方便等.

为了更好地调整曲线的形状,得到满意的曲线图形,人们提出了一些带形状参数的样条曲线.如:使用张量参数构造的一类带形状参数的分段多项式曲线,称之为 β 曲线^[1];在控制多边形不变时,通过调节参数的大小来调整曲线形状的二次三角多项式曲线^[2];利用含有三角函数、双曲函数的基函数构造的 C-B 样条曲线和 H-B 样条曲线^[3-4];基于四次调配函数构造的一种带单个形状控制参数的分段多项式曲线^[5];王文涛等人构造的 k 阶($k \geq 2$)带形状参数的代数和三角均匀 B 样条曲线^[6-7].文献[8]对上述带形状参数样条曲线的特点进行了归纳与总结,并分析了形状参数对曲线的影响.由于上述曲线中的形状参数均为全局参数,即改变形状参数的取值会使得整条曲线的形状发生变化,所以曲线都无法进行局部调整.文献[9]构造了一类带一个局部形状参数的分段多项式样条曲线,曲线的每一段虽然具有局部形状调节能力,但只含单个局部形状参数,使得曲线的局部形状可调性较差.

本文基于四次调配函数,构造出了一种新的带有 λ_i, μ_i 2 个局部形状参数的分段多项式样条曲线,它以三次均匀 B 样条曲线为特殊情形,而且当参数 $\lambda_i = \mu_i$ 时,使得文献[9]中的曲线成为本文的特例.

1 三次均匀 B 样条曲线的新扩展

1.1 调配函数的构造与性质

定义 1 对任意 $t \in [0, 1]$, $\lambda_i, \mu_i \in \mathbf{R}$, 则称关于 t 的多项式

$$\left. \begin{aligned} b_0^4(t) &= \frac{1}{6}(1-\lambda_i t)(1-t)^3 \\ b_1^4(t) &= \frac{1}{6}[4-6t^2+(3+\mu_i)t^3-\mu_i t^4] \\ b_2^4(t) &= \frac{1}{6}[1+(3+\lambda_i)t+3(1-\lambda_i)t^2-3(1-\lambda_i)t^3-\lambda_i t^4] \\ b_3^4(t) &= \frac{1}{6}[1-\mu_i(1-t)]t^3 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

为带 λ_i, μ_i 参数的四次调配函数.

定理 1 对定义 1 中的调配函数 $b_i^4(t)$, $i=0, 1, 2, 3$, 有如下结论:

$$(1) \sum_{i=0}^3 b_i^4(t) \equiv 1;$$

$$(2) \text{ 当 } -2 \leq \lambda_i, \mu_i \leq 1 \text{ 时, 对 } t \in [0, 1] \text{ 有 } b_i^4(t) \geq 0 \quad (i=0, 1, 2, 3);$$

$$(3) \text{ 当 } \lambda_i = \mu_i \text{ 时, 式(1)中四次调配函数具有对称性, 即 } b_0^4(t) = b_3^4(1-t), b_1^4(t) = b_2^4(1-t).$$

证明 将式(1)整理可得

$$\left. \begin{aligned} b_0^4(t) &= \frac{1}{6}(1-t)^3 - \frac{\lambda_i}{6}t(1-t)^3 \\ b_1^4(t) &= \frac{1}{6}(3t^3-6t^2+4) + \frac{\mu_i}{6}(1-t)t^3 \\ b_2^4(t) &= \frac{1}{6}(-3t^3+3t^2+3t+1) + \frac{\lambda_i}{6}t(1-t)^3 \\ b_3^4(t) &= \frac{1}{6}t^3 - \frac{\mu_i}{6}(1-t)t^3 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

则由式(2)中等式的左右两边分别相加可得结论(1),由文献[9]给出的 n 次多项式在 $[0, 1]$ 上非负的充分条件可得结论(2),直接计算可证结论(3).

显然,由定义 1 可知,当 $\lambda_i = \mu_i = 0$ 时,式(1)所示的四次调配函数便是三次均匀 B 样条基函数.

1.2 曲线的构造与性质

定义 2 给定控制顶点 $\mathbf{P}_i \in \mathbf{R}^n$ ($n=2, 3; i=0, 1, \dots, n$) 和节点 $u_1 < u_2 < \dots < u_{n+1}$, 对 $u \in [u_i, u_{i+1}]$, $i=3, 4, \dots, n$, 可定义多项式曲线段

$$C_{i,4}(\lambda_i, \mu_i; t) = \sum_{j=0}^3 \mathbf{P}_{i+j-3} b_j^4(t) \quad (3)$$

式中: $t = (u - u_i)/h_i$, $h_i = u_{i+1} - u_i$; $b_j^4(t)$ 为式(1)所定义的四次调配函数.由此可定义多项式曲线

$$C_4(\lambda_i, \mu_i; u) = C_{i,4}(\lambda_i, \mu_i; \frac{u-u_i}{h_i}) \quad (4)$$

式中: $u \in [u_i, u_{i+1}]$.

曲线 $C_4(\lambda_i, \mu_i; u)$ 是定义在 $[u_i, u_{i+1}]$ 上的带 λ_i, μ_i 局部形状参数的分段四次多项式样条曲线,它是三次均匀 B 样条曲线的扩展.不难推出,式(4)曲线的每一段 $C_{i,4}(\lambda_i, \mu_i; t)$, $i=3, 4, \dots, n$ 具有以下性质.

(1) 端点性质,即

$$\left. \begin{aligned} C_{i,4}(\lambda_i, \mu_i; 0) &= \frac{1}{6}[\mathbf{P}_{i-3} + 4\mathbf{P}_{i-2} + \mathbf{P}_{i-1}] \\ C_{i,4}(\lambda_i, \mu_i; 1) &= \frac{1}{6}[\mathbf{P}_{i-2} + 4\mathbf{P}_{i-1} + \mathbf{P}_i] \\ C'_{i,4}(\lambda_i, \mu_i; 0) &= \frac{1}{6}(3+\lambda_i)[\mathbf{P}_{i-1} - \mathbf{P}_{i-3}] \\ C'_{i,4}(\lambda_i, \mu_i; 1) &= \frac{1}{6}(3+\mu_i)[\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_{i-2}] \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

(2)凸包性.

(3)当 $\lambda_i = \mu_i$ 时, $C_{i,4}(\lambda_i, \mu_i; t)$ 具有对称性.

定理 2 当 $-2 \leq \lambda_i, \mu_i \leq 1$ 时, 曲线 $C_4(\lambda_i, \mu_i; u)$ 是 G^1 连续的. 若曲线相邻两段 $C_{i,4}(\lambda_i, \mu_i; t)$ 、 $C_{i+1,4}(\lambda_{i+1}, \mu_{i+1}; t)$ 满足 $\mu_i = \lambda_{i+1}$ (或满足 $\lambda_i = \mu_i = \lambda_{i+1} = \mu_{i+1}$), 则曲线 $C_4(\lambda_i, \mu_i; u)$ 是 C^1 (或 G^2) 连续的.

证明 根据式(5)可知, 当 $-2 \leq \lambda_i, \mu_i \leq 1$ 时, 对于 $i = 3, 4, \dots, n$, 则有

$$\left. \begin{aligned} C_{i+1,4}(\lambda_{i+1}, \mu_{i+1}; 0) &= C_{i,4}(\lambda_i, \mu_i; 1) \\ C'_{i+1,4}(\lambda_{i+1}, \mu_{i+1}; 0) &= L_i C'_{i,4}(\lambda_i, \mu_i; 1) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式中: $L_i = (3 + \lambda_{i+1}) / (3 + \mu_i)$, 故曲线 $C_4(\lambda_i, \mu_i; u)$ 是 G^1 连续的. 若曲线相邻两段 $C_{i,4}(\lambda_i, \mu_i; t)$ 、 $C_{i+1,4}(\lambda_{i+1}, \mu_{i+1}; t)$ 的形状参数满足 $\mu_i = \lambda_{i+1}$, 则式(6)中 $L_i = 1$, 故曲线 $C_4(\lambda_i, \mu_i; u)$ 是 C^1 连续的.

若曲线相邻两段 $C_{i,4}(\lambda_i, \mu_i; t)$ 、 $C_{i+1,4}(\lambda_{i+1}, \mu_{i+1}; t)$ 满足 $\lambda_i = \mu_i = \lambda_{i+1} = \mu_{i+1}$, 即各段所有形状参数均相等, 不妨设 $\lambda_i = \mu_i = \lambda_{i+1} = \mu_{i+1} = \lambda$, 那么对 $C_{i,4}(\lambda, \lambda; t)$ 直接计算可得

$$\begin{aligned} C''_{i,4}(\lambda, \lambda; 0) &= (1 + \lambda) \mathbf{P}_{i-3} - 2\mathbf{P}_{i-2} + (1 - \lambda) \mathbf{P}_{i-1} \\ C''_{i,4}(\lambda, \lambda; 1) &= (1 - \lambda) \mathbf{P}_{i-2} - 2\mathbf{P}_{i-1} + (1 + \lambda) \mathbf{P}_i \end{aligned}$$

令 $L_1 = 1, L_2 = -12 \frac{\lambda}{(3 + \lambda)}$, 则有 $C'_{i+1,4}(\lambda, \lambda; 0) = L_1^2 C''_{i,4}(\lambda, \lambda; 1) + L_2 C'_{i,4}(\lambda, \lambda; 1)$, 故曲线 $C_4(\lambda_i, \mu_i; u)$ 是 G^2 连续的.

定理 2 表明, 曲线 $C_4(\lambda_i, \mu_i; u)$ 的端点位置、端点切矢及二阶导数与三次均匀 B 样条曲线的性质基本一致.

2 局部形状参数的几何意义

为了有效地调整扩展曲线的形状, 使曲线的设计更加符合工程需求, 本文给出曲线段 $C_{i,4}(\lambda_i, \mu_i; t)$ 的形状参数 λ_i, μ_i 的几何意义.

定理 3 以 $\mathbf{P}_{i-3}, \mathbf{P}_{i-2}, \mathbf{P}_{i-1}, \mathbf{P}_i$ 为控制顶点的四次多项式样条曲线段 $C_{i,4}(\lambda_i, \mu_i; t)$ 等价于以 $\mathbf{Q}_{i,0}, \mathbf{Q}_{i,1}, \mathbf{Q}_{i,2}, \mathbf{Q}_{i,3}, \mathbf{Q}_{i,4}$ 为控制顶点的四次 Bézier 曲线, 其中

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{Q}_{i,0} &= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} (\mathbf{P}_{i-3} + \mathbf{P}_{i-1}) \right] + \frac{2}{3} \mathbf{P}_{i-2} \\ \mathbf{Q}_{i,1} &= \frac{1}{3} \left[\frac{1-\lambda_i}{8} \mathbf{P}_{i-3} + \frac{7+\lambda_i}{8} \mathbf{P}_{i-1} \right] + \frac{2}{3} \mathbf{P}_{i-2} \\ \mathbf{Q}_{i,2} &= \frac{1}{2} (\mathbf{P}_{i-2} + \mathbf{P}_{i-1}) \\ \mathbf{Q}_{i,3} &= \frac{1}{3} \left[\frac{7+\mu_i}{8} \mathbf{P}_{i-2} + \frac{1-\mu_i}{8} \mathbf{P}_i \right] + \frac{2}{3} \mathbf{P}_{i-1} \\ \mathbf{Q}_{i,4} &= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} (\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_{i-2}) \right] + \frac{2}{3} \mathbf{P}_{i-1} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

证明 设 $B_i^4(t)$ ($i=0, 1, 2, 3, 4$) 为四次 Bernstein 基函数, 将 $b_i^4(t)$ 表示为 $B_i^4(t)$ 的线性组合, 其矩阵形式为

$$(b_0^4, b_1^4, b_2^4, b_3^4) = (B_0^4, B_1^4, B_2^4, B_3^4, B_4^4) \mathbf{M}$$

式中

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{(1-\lambda_i)}{24} & \frac{2}{3} & \frac{(7+\lambda_i)}{24} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{(7+\mu_i)}{24} & \frac{2}{3} & \frac{(1-\mu_i)}{24} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

则曲线 $C_{i,4}(\lambda_i, \mu_i; t)$ 可表示为

$$\begin{aligned} C_{i,4}(\lambda_i, \mu_i; t) &= (b_0^4, b_1^4, b_2^4, b_3^4) (\mathbf{P}_{i-3}, \mathbf{P}_{i-2}, \mathbf{P}_{i-1}, \mathbf{P}_i)^T \\ &= (B_0^4, B_1^4, B_2^4, B_3^4) \mathbf{M} (\mathbf{P}_{i-3}, \mathbf{P}_{i-2}, \mathbf{P}_{i-1}, \mathbf{P}_i)^T \end{aligned} \quad (8)$$

令

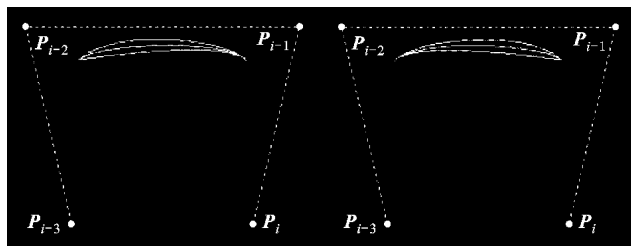
$$\begin{aligned} C_{i,4}(\lambda_i, \mu_i; t) &= (B_0^4, B_1^4, B_2^4, B_3^4, B_4^4) \cdot \\ &= (\mathbf{Q}_{i,0}, \mathbf{Q}_{i,1}, \mathbf{Q}_{i,2}, \mathbf{Q}_{i,3}, \mathbf{Q}_{i,4})^T \end{aligned} \quad (9)$$

显然, 式(9)是一条以 $\mathbf{Q}_{i,0}, \mathbf{Q}_{i,1}, \mathbf{Q}_{i,2}, \mathbf{Q}_{i,3}, \mathbf{Q}_{i,4}$ 为控制顶点的四次 Bézier 曲线, 故由式(8)和式(9)可证得式(7)成立.

由定理 3 可知, 改变曲线段 $C_{i,4}(\lambda_i, \mu_i; t)$ 的形状参数 λ_i, μ_i , 相当于改变与之等价的四次 Bézier 曲线的 $\mathbf{Q}_{i,1}, \mathbf{Q}_{i,3}$ 2 个控制顶点. 当形状参数 λ_i, μ_i 分别从 -2 逐渐增大到 1 时, 等价四次 Bézier 曲线的控制顶点 $\mathbf{Q}_{i,1}, \mathbf{Q}_{i,3}$ 分别从靠近 $\mathbf{P}_{i-2}$ 和 $\mathbf{P}_{i-1}$ 的方向逐渐接近线段 $\overline{\mathbf{P}_{i-2}\mathbf{P}_{i-1}}$. 由此, 可得曲线段 $C_{i,4}(\lambda_i, \mu_i; t)$ 的形状参数 λ_i, μ_i 的几何意义为: ①当固定 μ_i , 而 λ_i 逐渐增大(或减小)时, 曲线逐渐靠近(或远离)控制顶点 $\mathbf{P}_{i-2}$ 和线段 $\overline{\mathbf{P}_{i-2}\mathbf{P}_{i-1}}$; ②当固定 λ_i , 而 μ_i 逐渐增大(或减小)时, 曲线逐渐靠近(或远离)控制顶点 $\mathbf{P}_{i-1}$ 和线段 $\overline{\mathbf{P}_{i-2}\mathbf{P}_{i-1}}$. 图 1 给出了形状参数 λ_i, μ_i 的几何意义.

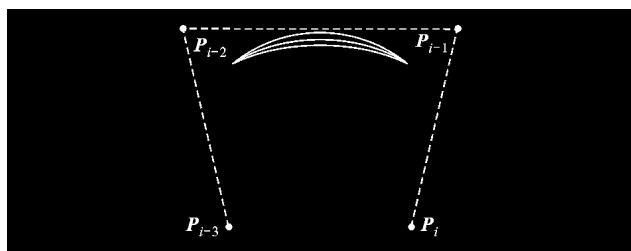
此外, 2 个参数同时改变可实现更灵活的逼近方式. 例如, 当参数 λ_i, μ_i 同时增大(或减小)时, 曲线逐渐靠近(或远离)其控制多边形; 当参数 λ_i, μ_i 中某一个增大, 而另一个减小时, 曲线一端逐渐靠近、另一端逐渐远离其控制多边形. 图 2 给出了 2 个参数同时增大时的情形.

由于每个形状参数可以是固定不变、增大或减小的, 因此通过改变局部形状参数 λ_i, μ_i 便可调整



(a)固定 μ_i , 从下到上依次为 $\lambda_i = -2, -1, 0.5$ 时的曲线
(b)固定 λ_i , 从下到上依次为 $\mu_i = -2, -1, 0.5$ 时的曲线

图1 形状参数 λ_i, μ_i 的几何意义



从下到上依次为 $\lambda_i = \mu_i = -1.5, -0.5, 1$ 时的曲线

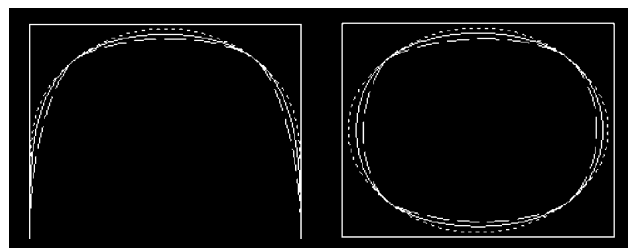
图2 参数 λ_i, μ_i 同时增大时的曲线

曲线段 $C_{i,4}(\lambda_i, \mu_i; t)$ 的形状,从而灵活实现 $C_3 \cdot C_3 - 1 = 8$ 种逼近方式(除去形状参数均固定不变的情形),而文献[1-7,9]中的曲线相对传统的三次均匀 B 样条曲线,其形状可调性均有所提高,但由于都只含有一个形状控制参数,通过改变单个形状参数的取值仅能实现 2 种简单的逼近方式,这使得曲线只能在 B 样条曲线的一侧或两侧简单摆动,形状可调性十分有限,而且其中的大多数曲线(文献[9]中的曲线除外)均无法进行局部调整.这说明本文方法比起引言中所述方法的灵活性、局部形状可调性及描述能力更好,能较好地满足几何造型中的要求.依据 λ_i, μ_i 的几何意义,用户根据自己的需要可方便、有效地进行曲线设计.

3 扩展曲线的应用

与三次均匀 B 样条曲线一样,对于基于四次调配函数的曲线 $C_4(\lambda_i, \mu_i; u)$,当要求曲线以 P_0 和 P_n 分别为起点和终点,并且在 P_0 和 P_n 处的切线分别为 $P_1 - P_0$ 和 $P_n - P_{n-1}$ 时,只要增加 2 个顶点 $P_{-1} = 2P_0 - P_1$ 和 $P_{n+1} = 2P_n - P_{n-1}$ 即可,而 $P_{-1}, P_0, \dots, P_{n+1}$ 是曲线的控制多边形.当要构造封闭曲线($P_0 = P_n$)时,只要对控制多边形多取 2 个顶点 $P_{n+1} = P_1, P_{n+2} = P_2$ 即可.图 3 给出了用新扩展曲线生成开曲线和闭曲线的实例.图 4 给出了不同参数下的五角星花瓣和花瓶图形的设计实例.此外,本文所

给曲线和三次均匀 B 样条曲线一样可以应用数据点插值,并且可以通过调节形状参数 λ_i, μ_i 灵活地实现插值曲线的局部形状调整,达到 G^1 连续.

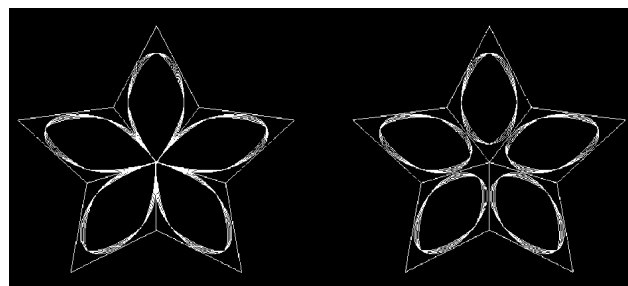


虚线: $\lambda_i = \mu_i = 1, i = 3, 4, 5$;
实线: $\lambda_3 = \mu_3 = 0, \lambda_4 = \mu_4 = 0.2, \lambda_5 = \mu_5 = -0.2$;
双划线: $\lambda_3 = -2, \mu_3 = -1, \lambda_4 = -1, \mu_4 = 0, \lambda_5 = -1, \mu_5 = -1.5$

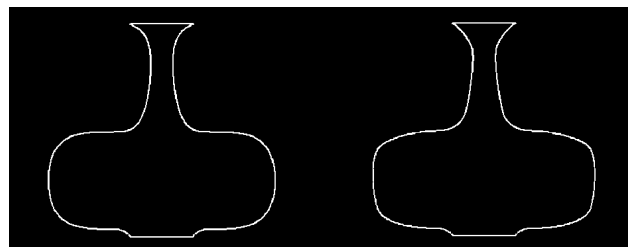
(a)生成的开曲线

(b)生成的闭曲线

图3 不同参数 λ_i, μ_i 的开曲线和闭曲线



(a) $\lambda_i = \mu_i = 1, 0, -1, -2$ (b) $\lambda_i = \mu_i = 1, 0, -1, -2$



(c) $\lambda_i = \mu_i = 1$ (d) $\lambda_i = \mu_i = -1$

图4 五角星花瓣和花瓶曲线设计实例

4 推广的扩展曲面

运用张量积方法,可将式(4)曲线的构造方法推广到相应的曲面上.

定义3 给定 $(m+1)(n+1)$ 个控制网格顶点 $P_{i,j}$ ($i = 0, 1, \dots, m; j = 0, 1, \dots, n$) 和节点 $u_1 < u_2 < \dots < u_{m+1}$ 以及 $v_1 < v_2 < \dots < v_{n+1}$, 对于 $u \in [u_i, u_{i+1}]$ 和 $v \in [v_j, v_{j+1}]$ ($i = 3, 4, \dots, m; j = 3, 4, \dots, n$),可定义与式(3)曲线段相应的张量积曲面片

$$S_{i,j,4}(\lambda_i, \mu_i, \lambda_j, \mu_j; t_1, t_2) = \sum_{l=0}^3 \sum_{n=0}^3 P_{i+l-3, j+n-3} b_l^4(t_1) b_n^4(t_2) \quad (10)$$

式中: $t_1 = (u - u_i)/(u_{i+1} - u_i)$; $t_2 = (v - v_j)/(v_{j+1} - v_j)$; b_i^4, b_j^4 分别为式(1)定义的调配函数. 由此可定义与式(4) 曲线相应的张量积样条曲面

$$S_4(\lambda_i, \mu_i, \lambda_j, \mu_j; u, v) = S_{i,j;4}\left(\lambda_i, \mu_i, \lambda_j, \mu_j; \frac{u - u_i}{u_{i+1} - u_i}, \frac{v - v_j}{v_{j+1} - v_j}\right) \quad (11)$$

式中: $u \in [u_i, u_{i+1}]$, $v \in [v_j, v_{j+1}]$.

式(11)曲面是定义在 $[u_3, u_{m+1}] \times [v_3, v_{n+1}]$ 上的带局部形状参数 $\lambda_i, \mu_i, \lambda_j, \mu_j$ 的分片多项式样条曲面,它是双三次均匀B样条曲面的扩展,若以双三次均匀B样条曲面为特殊情形,其具有与之相似的几何性质. 此外,通过修改式(11)曲面的4个局部形状控制参数,可灵活地按 $C_3^3 C_3^3 C_3^3 C_3^3 - 1 = 80$ 种方式改变曲面 $S_4(\lambda_i, \mu_i, \lambda_j, \mu_j; u, v)$ 每一片的形状,这说明新的扩展曲面具有较强的局部形状可调性和几何造型能力,可广泛地应用于CAD/CAM领域中的各种曲面造型系统.

5 结 论

本文由一组含有 λ_i, μ_i 2个参数的四次调配函数,构造出一种带2个局部形状控制参数的分段多项式样条新曲线,它以三次均匀B样条曲线为特殊情形,并具有与之相似的几何性质. 对于新的扩展曲线,当 $-2 \leq \lambda_i, \mu_i \leq 0$ 时,随着 λ_i, μ_i 的增大,曲线逐渐接近三次均匀B样条曲线;当 $0 \leq \lambda_i, \mu_i \leq 1$ 时,随着 λ_i, μ_i 的增大,曲线逐渐接近其控制多边形. 本文所给曲线的优点是:对于给定的控制顶点,在不改变曲线 G^1 连续性的同时,可通过任意调整局部形状参数 λ_i, μ_i ,来对曲线每一段的形状进行修改,却不影响曲线其他各段的形状且形状参数 λ_i, μ_i 的几何意义明显. 通过改变 λ_i, μ_i 来调整曲线每一段的形状,可灵活实现8种逼近方式. 运用张量积方法,可将曲线的构造方法推广到相应的曲面上. 造型实例说明,本文方法在曲线曲面设计中是有效的,并具有重要的理论与实际应用价值.

参考文献:

[1] JOE B. Multiple-knot and rational cubic beta-splines

- [J]. ACM Trans on Graphics, 1989, 8(2): 100-120.
- [2] HAN Xuli. Quadratic trigonometric polynomial curves with a shape parameter [J]. Computer Aided Geometric Design, 2002, 19 (7): 503-512.
- [3] ZHANG Jiwen. C-curves: an extension of cubic curves [J]. Computer Aided Geometric Design, 1996, 13 (3): 199-217.
- [4] LÜ Yonggang, WANG Guozhao, YANG Xunnian. Uniform hyperbolic polynomial B-spline curves [J]. Computer Aided Geometric Design, 2002, 19(6): 379-393.
- [5] 韩旭里, 刘圣军. 三次均匀B样条曲线的扩展 [J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2003, 15(5): 576-578. HAN Xuli, LIU Shengjun. An extension of the cubic uniform B-spline curves [J]. Journal of Computer Aided Design & Computer Graphics, 2003, 15(5): 576-578.
- [6] 王文涛, 汪国昭. 带形状参数的均匀B样条 [J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2004, 16(6): 783-88. WANG Wentao, WANG Guozhao. Uniform B-spline with shape parameter [J]. Journal of Computer Aided Design & Computer Graphics, 2004, 16(6): 783-788.
- [7] 王文涛, 汪国昭. 带形状参数的三角多项式均匀B样条 [J]. 计算机学报, 2005, 28(7): 1192-1198. WANG Wentao, WANG Guozhao. Trigonometric polynomial uniform B-spline with shape parameter [J]. Chinese Journal of Computers, 2005, 28(7): 1192-1198.
- [8] 刘旭敏, 黄厚宽. 带形状参数样条曲线的研究 [J]. 计算机研究与发展, 2007, 44(3): 487-496. LIU Xumin, HUANG Houkuan. Study of spline-curves with shape parameters [J]. Journal of Computer Research and Development, 2007, 44(3): 487-496.
- [9] 徐岗, 汪国昭. 带局部形状参数的三次均匀B样条曲线的扩展 [J]. 计算机研究与发展, 2007, 44(6): 1032-1037. XU Gang, WANG Guozhao. Extensions of uniform cubic B-spline curve with local shape parameters [J]. Journal of Computer Research and Development, 2007, 44(6): 1032-1037.

(编辑 苗凌)